Programmation Linéaire : Résumé examen janvier 08

Introduction aux problèmes linéaires

On nous donne un problème industriel, il faut le **modéliser** en problème linéaire afin de le résoudre et de trouver la solution **optimale**. Un problème linéaire, sous sa forme générale, s'écrit comme suit (par exemple) :

$$\begin{cases} \max x_1 - 2x_2 + 4x_3 & \color{red}{\textit{Objectif}} \\ \left.\begin{array}{c} x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 10 \\ 2x_1 - x_2 + 6x_3 \geq 5 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \end{array}\right\} & \color{red}{\textit{Contraintes réelles}} \\ \left.\begin{array}{c} -\infty \leq x_1 \leq +\infty \\ x_2 \geq 0 \\ -\infty \leq x_3 \leq +\infty \end{array}\right\} & \color{red}{\textit{Contraintes de signe}} \end{cases}$$

Ce problème possède **3 variables** et **3 contraintes**. En général, un problème linéaire comportera $\boldsymbol{n}$ variables et $\boldsymbol{m}$ contraintes (notation que l'on adopte).

Afin de faciliter la résolution d'un tel problème, nous serons amenés à transformer ce problème en une forme différente, soit la **forme standard** soit la **forme canonique**. Voici ces 2 formes :

Forme canonique : $\begin{cases} \min Z = CX \\ TX \geq d \\ X \geq 0 \end{cases}$ *Forme standard* : $\begin{cases} \min Z = CX \\ TX = d \\ X \geq 0 \end{cases}$

De manière générale, on veut donc un problème de **minimalisation** sur des variables **positives** et avec des contraintes du type « ≥ » pour la *forme canonique* et du type « = » pour la *forme standard*.

Comment transformer tout problème en sa forme standard ou canonique ?

1. Transformer une maximalisation en une minimalisation.
   Il s'agit du point le plus simple, en effet : $\max f(x) = \min -f(x)$.
   Ainsi, par exemple : $\max(x + 2y + 3z) = \min(-x - 2y - 3z)$.

2. Forcer une variable à être positive.
   2 solutions.
   a. On pose $x_j = x_j^+ - x_j^-$ avec $\begin{cases} x_j^+ = \max(0, x_j) \geq 0 \\ x_j^- = \max(0, -x_j) \geq 0 \end{cases}$, et on remplace x_j par ces 2 nouvelles variables dans le problème linéaire.
      ⇨ Conséquence : **Cela va doubler le nombre de variables.**

   Exemples :

   - $x_j = 6 \rightarrow x_j^+ = 6 \; et \; x_j^- = 0 \rightarrow 6 = 6 - 0$
   - $x_j = -4 \rightarrow x_j^+ = 0 \; et \; x_j^- = 4 \rightarrow -4 = 0 - 4$

b. On utilise une seule variable pour toutes les variables négatives.
Par exemple, $x_1' = x_1 + \bar{x}\ et\ x_3' = x_3 + \bar{x}\ avec\ x_1', x_3', \bar{x} \geq 0$
⇨ Conséquence : **Une seule variable supplémentaire est ajoutée.**

3. Transformer des égalités et des $\leq$ en $\geq$.
Exemples généraux :
- $x + y \leq 2 \rightarrow -x - y \geq -2\ (multiplication\ par\ (-1))$
- $x + y = 2 \rightarrow \begin{cases} x + y \geq 2 \\ x + y \leq 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y \geq 2 \\ -x - y \leq 2 \end{cases}$

⇨ Il y a toujours moyen de faire ce genre de conversion.

4. Transformer des inégalités en égalités.
On va utiliser des variables appelées **variables d'écart**.
Exemple généraux :
- $x + y \leq 2 \rightarrow x + y + x_1^e = 2\ avec\ x_1^e \geq 0$
- $x + y \geq 2 \rightarrow x + y - x_2^e = 2\ avec\ x_2^e \geq 0$

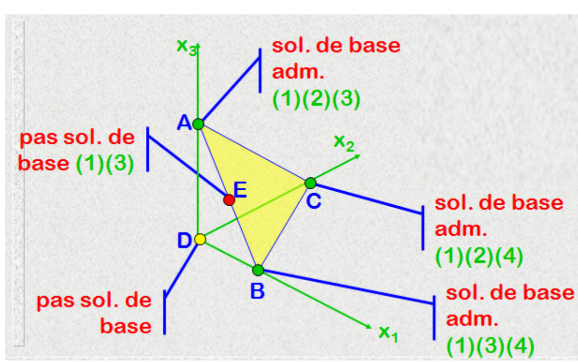
Vue algébrique des problèmes linéaires.

Plaçons-nous dans le cas d'un problème linéaire écrit sous sa forme standard : $\begin{cases} \min Z = CX \\ TX = d \\ X \geq 0 \end{cases}$

On peut considérer l'ensemble des solutions comme un polyèdre résultant de l'intersection des hyperplans délimités par les contraintes. Dès lors, si on fixe que toutes les lignes de la matrice T dans notre problème sont linéairement indépendantes, en d'autres termes que $r(T) = m$, on peut décomposer celle-ci en une base et une matrice quelconque : $T = (B, R)$ avec $B(m \times m)\ et\ R(m \times (n - m))$. Dès lors la fonction objectif de notre problème linéaire peut être réécrite comme :

$\min Z = C_B X_B + C_R X_R$, de plus, si on pose $\begin{cases} X_R = 0 \\ X_B = B^{-1} d \end{cases}$, on a une solution de base car elle vérifie $TX = d$. Dès lors, si $X_B \geq 0$, on a une **solution de base admissible**.

Par rapport à notre approche géométrique, si on a que $X = (X_B, X_R)$ est **une solution de base admissible**, alors ces coordonnées correspondent à un **sommet**, et par interprétation géométrique, on peut voir que la solution optimale se trouvera toujours sur un sommet (on peut parfois avoir une face de solution optimale, mais le sommet appartient également à la face).



L'algorithme simplexe.

On part d'un problème linéaire mis sous sa forme standard :

$$\begin{cases} \min Z = CX \\ TX = d \\ X \geq 0 \end{cases}$$

On le transforme grâce au point développé précédemment,

$$\begin{cases} \min Z = C_B X_B + C_R X_R \\ B X_B + R X_R = d \\ X_B \geq 0 \quad X_R \geq 0 \end{cases}$$

On multiplie, à gauche, la seconde ligne par B^{-1},

$$\begin{cases} \min Z = C_B X_B + C_R X_R \\ X_B + B^{-1} R X_R = B^{-1} d \\ X_B \geq 0 \quad X_R \geq 0 \end{cases}$$

On isole X_B dans la seconde ligne et on remplace sa valeur dans la première,

$$\begin{cases} \min Z = C_B (B^{-1} d - B^{-1} R X_R) + C_R X_R \\ X_B = B^{-1} d - B^{-1} R X_R \\ X_B \geq 0 \quad X_R \geq 0 \end{cases}$$

On met X_R en évidence et on prend les quantités encadrées pour construire le **tableau simplexe** :

$$\begin{cases} \min Z = \boxed{C_B B^{-1} d} - (\boxed{C_B B^{-1} R - C_R}) X_R \\ X_B = \boxed{B^{-1} d} - \boxed{B^{-1} R} X_R \\ X_B \geq 0 \quad X_R \geq 0 \end{cases}$$

On construit donc notre **tableau simplexe (on le simplifie par la suite en posant C_B = 0 et B = 1)** :

		X_R	
z	$C_B B^{-1} d$	$C_B B^{-1} R - C_R$	$\rightarrow z = C_B B^{-1} d - (C_B B^{-1} R - CR)\, X_R$
X_B	$B^{-1} d$	$B^{-1} R$	$\rightarrow X_B = B^{-1} d - B^{-1} R X_R$

Ce tableau dépend évidemment de la base choisie. On peut également voir ce tableau comme :

		x_j
z	a_{00}	a_{0j}
x_i	x_{i0}	a_{ij}

$$\rightarrow \begin{cases} \min Z = a_{00} - \sum a_{0j} x_j \\ x_i = a_{i0} - \sum a_{ij} x_j \\ x_i \geq 0 \quad x_j \geq 0 \end{cases}$$

Cheminement de l’algorithme :

Première phase :

Déterminer une première solution de base admissible (coordonnées d’un premier sommet).

Deuxième phase :

Calculer, à partir d’une solution de base admissible, une autre solution de base admissible donnant une meilleure valeur de la fonction objectif (trouver un sommet ayant une meilleure valeur d’objectif que le précédent).

Quand est-ce qu’on peut/doit changer de base ?

Il faut changer de base lorsque l’on peut d’une façon ou d’une autre diminuer la valeur de l’objectif. Ainsi, sur le tableau simplexe ça se voit de la manière suivante : si $\exists j \in J, \exists i \in J$ *tq* $\begin{cases} x_{0j} > 0 \\ x_{ij} > 0 \end{cases}$.

		x_j
z	a_{00}	$x_{0j} > 0$
x_i	x_{i0}	$\exists x_{ij} > 0$

Cas d’absence de solution optimale finie.

Soit une solution de base admissible, si $\exists k \in J tq \begin{cases} a_{0k} > 0 \\ \forall i \in J, a_{ik} \leq 0 \end{cases}$ *alors la fonction objectif Z peut prendre une valeur aussi petite que voulue.* ***Il n’y a donc pas de solution optimale finie****.*
(Preuve : voir cours)

		x_j
z	a_{00}	$a_{0k} > 0$
x_i	x_{i0}	$\forall x_{ik} \leq 0$

Quand est-ce que je dois arrêter l’algorithme ?

Il est évident qu’il faut l’arrêter cet algorithme lorsque l’on trouve la solution optimale à notre problème. Cela peut cependant se voir sur le tableau simplexe. Une solution de base admissible sera une/la solution de base optimale si et seulement si $\forall j \in J$, *on a* $a_{0j} \leq 0$. *C’est-à-dire :*

		≤ 0
x_i	≥ 0	

Changer de base : exemple général.

		x_4
Z	10	5
x_1	8	-3
x_2	6	2
x_3	2	$\boxed{6}$

$\rightarrow on\ a\ un\ x_k > 0\ avec\ au\ moins\ un\ x_{ik} > 0, on\ peut\ donc\ améliorer \rightarrow changement\ de\ base.$

On détermine le **pivot.** Ce nombre est l'intersection dans le tableau entre la variable à faire sortir de la base et la variable à y faire entrer (on choisit celle qui a le coefficient hors-base le plus grand). Il est généralement choisi en fonction du rapport entre lui-même et le coefficient de la variable en base. Ici on a 2 choix de pivot : 2 et 6. Regardons donc les 2 rapports : $\begin{cases} 6/2 = 3 \\ 2/6 = 1/3 \end{cases}$ ➔ on choisit donc 6.

Que représentent ces rapports ? En fait, il s'agit de la diminution qui va être apportée aux coefficients des variables en base et pour qu'elles restent toutes positives, il faut soustraire le minimum des rapports. Dans notre exemple on peut faire sortir 3 variables de la base :

$$\text{Si } x_k = x_k^* > 0, alors \begin{cases} x_1 = 8 + 3x_k^* \geq 0\ (car\ x_k^* > 0) \\ x_2 = 6 - 2x_k^* \geq 0\ ssi\ x_k^* \leq \frac{6}{2} \\ x_3 = 2 - 6x_k^* \geq 0\ ssi\ \boxed{x_k^* \leq \frac{2}{6}} \end{cases}$$

- On va donc faire sortir la variable x_3 de la base pour y faire entrer x_4
  a. Le pivot devient 1/pivot.
  b. On divise la ligne du pivot par le pivot.
  c. On divise la colonne du pivot par -le pivot.
  d. On applique la règle du rectangle : $nbr = nbr - \frac{(prod\ des\ extrêmes)}{pivot}$

			x_4	
Z	a	b	c	d
x_1	e	f	g	h
x_2	i	j	k	l
x_3	m	n	$\boxed{o}$	p

Imaginons ici que o est le pivot et que l'on veut calculer la nouvelle valeur pour a,

$$a = a - \frac{(prod\ des\ extrêmes)}{pivot} = a - \frac{(c * m)}{o}$$

Imaginons ici que o est le pivot et que l'on veut calculer la nouvelle valeur pour d,

$$d = d - \frac{(prod\ des\ extrêmes)}{pivot} = d - \frac{(c * p)}{o}$$

<u>Dans notre exemple</u>, on aura donc :

		x_3
Z	$10-\frac{10}{6}$	$\frac{5}{-6}$
x_1	$8-\frac{2(-3)}{6}=9$	$-\frac{3}{-6}=-\frac{1}{2}$
x_2	$6-\frac{2.2}{6}=\frac{32}{6}$	$\frac{2}{-6}=-\frac{1}{3}$
x_4	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$

Attention, ceci ne marche que sous les 2 hypothèses émises plutôt, c'est-à-dire :

- H1 : $r(T)=m$
- H2 : ∃ une base initiale admissible.

Jusqu'à présent on prenait en général la base contenant les variables d'écart car cela nous donnait presqu'à chaque fois la matrice identité, cela simplifiant énormément les calculs. Cependant ce n'est pas toujours le cas, en effet on peut avoir une base non-admissible, par exemple dans le problème ci-dessous la base initiale choisie n'est pas admissible. Sous forme standard :

$$\begin{cases} \min -6x_1-5x_2 \\ x_1+x_2-x_1^e=8 \\ -2x_1+3x_2+x_2^e=6 \rightarrow X_B=(x_1^e=-8, x_2^e=6, x_3^e=2)\ et\ X_R=(x_1=0, x_2=0) \\ x_1-x_2+x_3^e=2 \\ x_1, x_2, x_1^e, x_2^e, x_3^e \geq 0 \end{cases}$$

- La base n'est pas admissible car les coefficients en base ne sont pas tous ≥ 0.

On cherche alors un procédé qui nous permettra de régler TOUS les problèmes. On introduit alors les **variables artificielles,** l'idée étant de transformer le problème initial en problème respectant les 2 hypothèses. On a notre problème initial :

$P=\begin{cases} \min Z=CX \\ TX=d \\ X\geq 0 \end{cases}$, et on pose $d\geq 0$ (si une composante est ≤ 0 il suffit de la multiplier par -1)

On va le transformer un problème P^a qui respecte les 2 hypothèses :

$$P^a=\begin{cases} \min Z=CX+M(\sum x_i^a) \\ TX+IX^a=d \\ X\geq 0 \end{cases}$$

→ M est un très grand nombre, on cherche ainsi à annuler l'effet des variables artificielles ($\forall i, x_i^a=0$) et donc à minimiser la somme dans l'objectif.

On prendra donc comme base $B=X^a$ et nous aurons une matrice identité avec $X_B\geq 0$ et donc une base admissible.

Exemple :

$$\begin{cases} 2x+3y+x_1^a \quad\quad = 2 \\ 3x-y \quad\quad +x_2^a = 6 \\ x,y \geq 0 \quad x_1^a, x_2^a \geq 0 \end{cases}$$ ➔ On tire $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $X_B = (2,6) \geq 0$ ➔ **Base admissible**.

Remarque : Les variables d'écart ne modifiait pas le problème, **or les variables artificielles si**.

Relations entre les conclusions trouvées pour P^a et ce que ça implique pour P :

P^a		P
Problème non-borné	➔	Problème non-borné
Solution Optimale Finie	➔	Solution optimale finie $(\forall x_i^a, x_i^a = 0)$ Problème impossible $(\exists x_i^a, x_i^a > 0)$
~~Problème impossible~~	X	XXXXXXXXXXX

Remarque : *il est impossible de trouver un problème impossible pour P^a car par H_2, on a qu'il existe une base admissible et donc un sommet du polyèdre.*

Remarque 2 : *Une fois qu'une variable artificielle est sortie de la base, elle ne peut plus y entrer.*

Que se passe-t-il si on a un coefficient nul en base ou en hors-base ?

1. En base
   Cela caractérise le fait qu'il y a une contrainte redondante et donc qu'il y a plusieurs bases possibles pour un même sommet.
2. Hors base
   Cela caractérise le fait qu'il peut y avoir une infinité de solutions semblables à celle trouvée. Par exemple si on se trouve à l'optimalité, on peut avoir une face complète du polyèdre comme solutions optimales. En effet dans l'algorithme simplexe, si on fait entrer une variable hors base avec un coefficient nul dans la base, la valeur de l'objectif ne sera pas modifiée.

La dualité.

L'idée est de considérer les problèmes différemment, « d'inverser » les contraintes et les variables.
Exemple :

$$P = \begin{cases} \max Z = 1x - 4y \\ 1x \leq 7 \\ -3x + 2y \leq -4 \\ 1x + 1y = 5 \\ x \geq 0,\ -\infty \leq y \leq +\infty \end{cases} \Leftrightarrow D = \begin{cases} \min Z = 7u_1 - 4u_2 + 5u_3 \\ 1u_1 - 3u_2 + 1u_3 \geq 1 \\ 2u_2 + 1u_3 = -4 \\ u_1, u_2 \geq 0,\ -\infty \leq u_3 \leq +\infty \end{cases}$$

3 contraintes, 2 variables ➔ 2 contraintes, 3 variables

Signe quelconque (pour y) ➔ égalité

Ainsi, $P = \begin{cases} \min Z = CX \\ TX = d \\ X \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow D = \begin{cases} \max W = ud \\ uT \leq c \end{cases}$

Définition du problème dual :

- A un problème primal de minimisation (maximisation) correspond un problème dual de maximisation (minimisation).
- A toute contrainte primale correspond une variable duale: si la contrainte est une inégalité, la variable duale est soumise à une condition de non négativité; si la contrainte est une égalité, la variable duale est de signe quelconque.
- A toute variable primale correspond une contrainte duale: si la variable est soumise à une condition de non négativité, la contrainte duale est une inégalité; si la variable est de signe quelconque, la contrainte duale est une inégalité.
- Les coefficients de la fonction économique du primal deviennent les seconds membres des contraintes duales; les seconds membres des contraintes primales deviennent les coefficients de la fonction économique du dual.
- Le coefficient de la variable x_j dans la contrainte i devient, dans le dual, le coefficient de la variable u_i dans la contrainte j.

Propriétés

a. **Dualité Faible** : si x et u sont des solutions admissibles respectivement du problème primal et de son problème dual alors elles vérifient : $cx \geq ud$.
   Preuve : $w = ud \leq uTx \leq cx = z \rightarrow objectif\ dual \leq objectif\ primal$
b. **Dualité Forte** : soient x et u des solutions admissibles du primal et du dual, **si on a $\boldsymbol{cx = ud}$**, alors x et u sont des **solutions optimales**.
   Remarque : $x \neq u$, car les problèmes sont différents, par contre on a $w = z$.
c. Si le **problème primal est non borné,** alors **le problème dual est impossible**.
   Preuve : $ud \leq cx \rightarrow -\infty$, on veut maximiser mais toutes les solutions $\rightarrow -\infty$ ➔ impossible.
d. ∃ une solution pour le problème **primal** ⇔ ∃ une solution pour le problème **dual** et $obj(P) = obj(D)$.

P\D	Optimal	Non-borné	Impossible
Optimal	X	//////////////	//////////////
Non-borné	//////////////	//////////////	X
Impossible	//////////////	X	X

Théorème des écarts complémentaires.

Soient x et u des solutions admissibles du (P) et du (D), une condition nécessaire et suffisante pour que x et u soient solutions optimales est qu'elles vérifient les relations :

$$\begin{cases} u(Tx - d) = 0 \\ (c - uT)x = 0 \end{cases}$$

Comparaison de l'algorithme dual et de l'algorithme simplexe.

$$P = \begin{cases} \min Z = CX \\ TX = d \\ X \geq 0 \end{cases} \leftrightarrow D = \begin{cases} \max W = ud \\ uT \leq c \end{cases}$$

- $T = (B, R)$

Algorithme	Simplexe	Dual
Solution de base	$\begin{cases} X_B = B^{-1}d \\ X_R = 0 \end{cases}$	$u^B = C_B B^{-1}$
Admissibilité	$B^{-1}d \geq 0$ $\begin{array}{\|c\|c\|} \hline \quad & \quad \\ \hline \geq 0 & \\ \hline \end{array}$	$C_B B^{-1}R - CR \leq 0$ $\begin{array}{\|c\|c\|} \hline \quad & \leq 0 \\ \hline & \\ \hline \end{array}$
Optimalité	$C_B B^{-1}R - CR \leq 0$ $\begin{array}{\|c\|c\|} \hline \quad & \leq 0 \\ \hline \geq 0 & \\ \hline \end{array}$	$B^{-1}d \geq 0$ $\begin{array}{\|c\|c\|} \hline \quad & \leq 0 \\ \hline \geq 0 & \\ \hline \end{array}$
Départ de l'algorithme	$\begin{array}{\|c\|c\|} \hline \quad & \quad \\ \hline \geq 0 & \\ \hline \end{array}$ Base primale admissible	$\begin{array}{\|c\|c\|} \hline \quad & \leq 0 \\ \hline & \\ \hline \end{array}$ Base duale admissible
Problème non-borné	$\begin{array}{\|c\|c\|} \hline \quad & > 0 \\ \hline & \leq 0 \\ & \dots \\ & \leq 0 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{\|c\|c\|} \hline \quad & \\ \hline < 0 & \geq 0 \quad \dots \quad \geq 0 \\ \hline \end{array}$
Amélioration	$\begin{array}{\|c\|c\|} \hline \quad & > 0 \\ \hline & \exists \geq 0 \\ x & \dots \quad \boxed{P} \\ \hline \end{array}$ $P > 0$	$\begin{array}{\|c\|c\|} \hline \quad & x \\ \hline & \exists < 0 \\ < 0 & \dots \quad \boxed{P} \\ \hline \end{array}$ $P < 0$
Procédure	On détermine la variable qui va rentrer en base puis celle qui va sortir.	On détermine la variable qui va sortir de la base puis celle qui va y entrer.

Que faire si la base de départ n'est pas duale admissible ? → Introduction de la contrainte artificielle. Cette contrainte s'écrit : $v + \sum x_J = M$, où M est un très grand nombre et les x_j sont les variables au signe incorrect. On prend ensuite une base contenant v, et on impose un changement de base, la sortie de v de la base et on introduit la variable ayant le plus grand coefficient.

Exemple général : On a un tableau simplexe du genre :

	-5	10	6	5	7	-3

La base est non duale admissible vu que tous les coefficients ne sont pas ≤ 0. On introduit la contrainte artificielle :

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
		-5	10	6	5	7	-3
v	M	0	$\boxed{1}$	1	1	1	0

On impose le changement de base, on fait rentrer x_2 en base :

		x_1	v	x_3	x_4	x_5	x_6
		-5	-10	-4	-5	-3	-3
x_2	…	…	…	…	…	…	…

Par la suite, dès que l'on a une base duale admissible et que v n'est plus hors base, on peut carrément supprimer la ligne concernant v car elle est superflue. Mais, s'il reste des M dans les coefficients et surtout dans l'objectif, le problème est non borné.

Comment, à partir d'un tableau simplexe optimale, déduire les valeurs des variables duales ?

- Si la variable d'écart correspondante est en base.
  On a $x_i^e > 0$ vu qu'elle est en base et par le théorème des écarts complémentaires, on a $x_i^e * u_i = 0$, ce qui implique que $u_i = 0$.
- Si la variable d'écart correspondante est hors-base.
  On a vu que dans la case en haut à droite se plaçait la quantité $C_B B^{-1} R - C_R$, or dans le cas de l'utilisation de variables d'écart, on a que pour une variable d'écart x_j^e qui est hors base, sa colonne correspondante dans R est une colonne de $-I(matrice\ identité)$, donc pour une x_j^e donnée, on a dans la case en haut à droite, c'est-à-dire a_{0j}, ceci :
  $$a_{0j} = C_B B^{-1} R_j - C_{R_j} = -(C_B B^{-1})_j - 0 = -(C_B B^{-1})_j = -\boldsymbol{u_j}$$
  En effet, $u_j = C_B B^{-1}$.

Problèmes linéaires à variables entières.

Algorithme Branch & Bound. *(Séparation & Evaluation)*

Séparation.

a. Finitude

Le nombre total de nœuds (= ensemble de sommets) doit être finis.

b. Conservation

Aucune solution ne peut être éliminée → $\bigcup_{\boldsymbol{k=1}}^{\boldsymbol{p}} \boldsymbol{S^{(ik)}} = \boldsymbol{S^{(i)}}$, où $S^{(ik)} \cap S^{(il)} = \emptyset$, $k \neq l \text{ } et \text{ } S^{(ik)} \text{ } pour \text{ } k = 1, \dots, p$ sont les sous ensembles du sous ensemble parent $S^{(i)}$.

c. Arrêt

- Soit $S^{(i)} = \emptyset$
- Soit le problème est résolu.

Evaluation.

- **Règle de minoration** → trouver une borne inférieur et $z^* \geq$ à $cette \text{ } borne$.
- **Règles de coïncidence** → trouver un sommet terminal. Si le problème est résolu, l'évaluation correspond à la solution optimale du sous-problème.

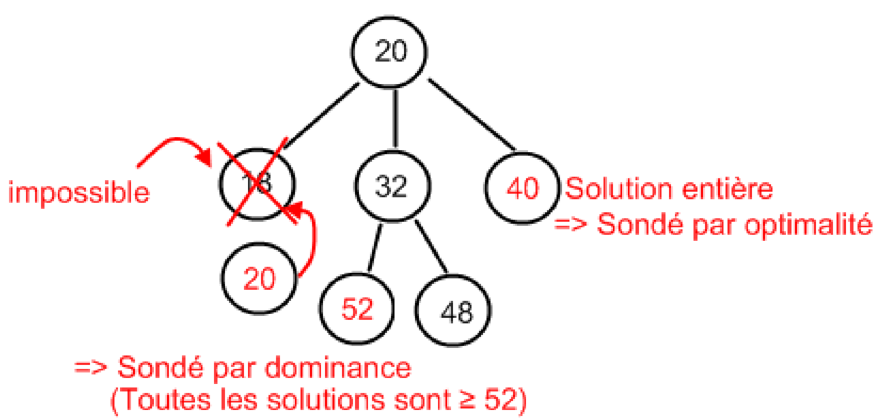
  ➔**Relaxation Linéaire :** Trouver un problème proche mais facile à résoudre :

$$\begin{cases} \min Z = CX \\ TX = d \\ X \geq 0 \\ \cancel{X \text{ } entière} \end{cases}$$

Sondage.

- Par impossibilité (∅).
- Par optimalité (la relaxation donne une solution admissible).
- Par dominance.

Exemple :



⇨ On ne s'en occupe plus, on ne **<u>sépare</u>** plus.

Cheminement.

- À priori
  - Soit en profondeur d’abord,
  - Soit en largeur d’abord.
- Adaptatif.